理学博士　井上 昭彦

学 位 論 文 題 名

The Alder-Wainwright Effect for Discrete-Time Stationary

Processes with Reflection Positivity

（鏡映正値性を持つ離散時間定常過程に対するAlder-Wainwright効果）

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、二種類のランダムな揺動力$\mathbf{W}_1$と$\mathbf{W}_2$に対して、無限の遅れを持つ確率差分方程式

$$\Delta X(n) = -\beta_j \left(\frac{X(n)+X(n-1)}{2}\right) - \underset{\epsilon\downarrow 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{m=-\infty}^{n-1} \gamma_{j,\epsilon}(n-m)\Delta X(m) + \alpha_j W_j(n) \quad \text{a.s.} \quad (n\in\mathbf{Z}) \quad (j=1,2)$$

を考える。ここで、$\Delta X(m) = X(m) - X(m-1)$であり、$\alpha_j$と$\beta_j$は正の定数である。また$j=1,2$と$\epsilon>0$に対して$\gamma_{j,\epsilon}$は、$[-1,1]$上のある有界ボレル測度$\rho_j$で条件$\rho_j(\{-1,1\})=0$及び$\int_{-1}^{1} 1/(1+\lambda)\rho_j(d\lambda)<1$を満たすものを用いて

$$\gamma_{j,\epsilon}(n) = \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} t^{n-1}\rho_j(dt) \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現されているとする。$\mathbf{W}_1 = (W_1(n); n\in\mathbf{Z})$は正規化されたガウス型ホワイトノイズである。$\mathbf{W}_2 = (W_2(n); n\in\mathbf{Z})$は、定常解$\mathbf{X} = (X(n); n\in\mathbf{Z})$に対する久保ノイズと呼ばれる実定常ガウス過程である。久保ノイズ$\mathbf{W}_2$は、統計物理学の線形応答理論に由来する関係式

$$X(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{n} R_2(n-m)W_2(m) \quad \text{a.s.} \quad (n\in\mathbf{Z})$$

を満たす様に定義される。ここでR_2は、$R_2(n) = E(X(n)X(0))$で定義される$\mathbf{X}$の相関関数である。

上の$j=1 (j=2)$に対する確率差分方程式は、岡部の導入した第1(第2)離散KMO-Langevin方程式を変形したものであり、修正第1(第2)離散KMO-Langevin方程式と呼ぶことにする。$j=2$の場合には、β_2と拡散係数$D=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_2(n)/2$の間で、Einsteinの関係式$D=R_2(0)/\beta_2$が成り立つように修正してあることを注意する。

まず、本論文の背景を説明する。定常過程の相関関数の多項式オーダーの減衰を、我々はAlder-Wainwright効果と呼ぶことにする。これは、AlderとWainwrightによるコンピューターシミュレーションにより初めて、速度の相関関数がこの種の長時間減衰をするブラウン粒子の存在が予言されたことに由来する。過去と強い相関を持つということは、非マルコフ的であるということであり、従来考えられていたマルコフ的なブラウン運動という描像と反する点で興味が持たれた。その後この様なブラウン粒子は、大林等により実験室における適当な物理的条件下で実際に観測された。

岡部は、このブラウン粒子の数学的モデルを含むクラスとして、鏡映正値性を持つ定常ガウス過程を考えた。そして拡散係数 $D = \int_0^\infty R_j(t)dt$ が有限のときに、その時間発展を記述する方程式として、無限の遅れを持つ確率微分方程式(第1,第2KMO-Langevin方程式)を導き、その構造を調べた。さらに岡部は、この連続時間のKMO-Langevin方程式に対して、方程式中の遅れの係数のやはり多項式オーダーの減衰により、Alder-Wainwright効果が特徴付けられることを示した。井上([参考論文2])は、この結果を多項式的減衰のオーダーが最も一般の場合にまで拡張した。岡部-井上([参考論文3])は、下に述べる離散時間の場合も一緒に、遅れの係数と相関関数がそれぞれ指数関数的に減衰することが同値であることも示している。

一方さらに岡部は、離散時間の定常ガウス過程で、鏡映正値性を持ち、拡散係数が有限のものに対して、それを記述する無限の遅れを持つ確率差分方程式(第1,第2離散KMO-Langevin方程式)を導きその構造を調べている。そこで、この離散時間の場合にも連続時間の時と同様に、相関関数の多項式的減衰が方程式中の遅れの係数の減衰の仕方により特徴付けられることが期待される。適当な仮定のもとで、実際にそれが正しいことを示すのがこの論文の目的である。

以下、本論文の結果を述べる。$\mathbf{X}_1 = (X_1(n); n \in \mathbf{Z})(\mathbf{X}_2 = (X_2(n); n \in \mathbf{Z}))$ を修正第1(第2)離散KMO-Langevin方程式の定常解で、平均0で相関関数 $R_1(R_2)$ が次のような鏡映正値性

$$R_j(n) = \int_{-1}^{1} t^{|n|}\sigma_j(dt) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

を持つものとする。ここで σ_j は $[-1,1]$ 上の0でない有界ボレル測度で、条件 $\sigma_j(\{-1,1\}) = 0$ 及び $\int_{-1}^{1}\{1/(1+t)+1/(1-t)\}\sigma_j(dt) < \infty$ を満たすものである。L を無限遠での緩変化(slowly varying)関数とする。即ち、L は無限遠のある近傍 $[M,\infty)$ で定義された正の可測関数で、任意の $\lambda > 0$ に

対して$\lim_{x\to\infty} L(\lambda x)/L(x)=1$を満たすものである。正定数やlogがその例である。各$\rho_j (j=1,2)$に対して$\gamma_j(n)$を、

$$\gamma_j(n)=\int_{-1}^{1} t^{n-1}\rho_j(dt) \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める。$\gamma_j(n)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\gamma_{j,\epsilon}(n)$に注意せよ。次の定理がこの論文の主定理である。

定理(論文中のTHEOREM1.1, 1.2). $j=1$又は2とし、$0<p<\infty$とする。$\mathrm{supp}\rho_j\subset[0,1]$を仮定する。このとき、次の二つは同値である:

$$\gamma_j(n)\sim n^{-p}L(n) \quad (n\to\infty)$$

$$R_j(n)\sim c_j p n^{-(1+p)}L(n) \quad (n\to\infty).$$

ここで、$c_1=\alpha_1{}^2\beta_1{}^{-3}$, $c_2=\sqrt{2\pi}\alpha_2\beta_2{}^{-2}$であり、$\sim$は比が$1$に行くことを意味する。

最後に、定理の仮定と証明の方法について説明する。証明は、大筋では筆者が参考論文2において、連続時間でオーダーが任意の場合を証明するのに開発したのと同じ方法を用いる。主な道具は、岡部の論文(連続時間でオーダーが$0<p<1$の場合)と同様Karamataのタウバー型定理である。これは、ある関数の減衰の度合と、その関数のラプラス変換の減衰の度合の関係を述べる定理である。しかし、タウバー型定理を適用する時には対象となる関数に対してある種の単調性が必要となるが、我々の方法に現われる関数は緩増加という弱い単調性しか持たない。従って我々の方法では、より強いタウバー型定理を用いることになる。

今、我々の考える離散時間の場合が連続時間のときと異なるのは、遅れの係数γ_jや相関関数R_jが必ずしも単調減少でないからである。しかしながら、例えばもし$\mathrm{supp}\rho_j\subset[0,1]$かつ$\mathrm{supp}\sigma_j\subset[0,1]$という状況があれば、その時は$\gamma_j$及び$R_j$とも単調減少になりうまくいくことがわかる。しかし$\mathrm{supp}\rho_j\subset[0,1]$でも必ずしも$\mathrm{supp}\sigma_j\subset[0,1]$は成り立たない(逆は成り立つ)。そこでこの論文では、$\mathrm{supp}\rho_j\subset[0,1]$という仮定をもうけ、その時$\mathrm{supp}\sigma_j$の様子を調べあげることで上の定理を証明した。実際、$\beta_j/2-1+\int_0^1 t^{-1}\rho_j(dt)$という量で$\mathrm{supp}\sigma_j$の形が分類され、そのいずれの場合も我々の方法が適用できることが分かるのである。

学位論文審査の要旨

主査　教授　岡部靖憲
副査　教授　越　昭三
副査　教授　安藤　毅
副査　教授　岸本晶孝

現在の確率論に於ける拡散過程論は、その源泉を統計物理学に於ける1905年のEinsteinのブラウン運動の理論と1908年のLangevinの確率微分方程式の理論に持つ。マルコフ性の数学的構造の研究が主要なテーマである。しかし、1960年代末、Einsteinの理論に疑義を持たざるを得ないAlderとWainwrightによる統計物理学的研究――剛体球と剛体円板からなる流体モデルのコンピューターシミュレーションによる実験に於いて、ブラウン粒子と見なす剛体球の運動の速度相関関数の長時間挙動は指数的減衰でなく、多項式的減衰である事、即ち、Alder-Wainwright効果――が発表されていた。Einsteinのブラウン運動の理論に於いては、速度相関関数の長時間挙動は指数的減衰である為、Alder-Wainwrightの結果は実際のブラウン運動はマルコフ性を持たない事を暗示した。

このAlder-Wainwright効果を統計物理学的に解明する研究が、EinsteinとLangevinより以前の19世紀末のStokesとBoussinesqの研究を基礎に、久保の線形応答理論を適用して行われ、Alder-Wainwright効果は物理理論としても物理実験としても検証された。

これらの研究に於いて、ブラウン粒子の速度を示すモデルは古典的Langevin方程式より流体力学的に近似の精度が良いStokes-Boussinesq-Langevin方程式の定常解によって与えられた。岡部は、確率過程論的に見て、その定常解が鏡映正値性を持つ事を見抜き、一般に、鏡映正値性を持つ連続時間定常過程の時間発展を記述する方程式として、Stokes-Boussinesq-Langevin方程式の一般形である第一(第二)KMO-Langevin方程式を導き、非平衡統計物理学に於ける揺動散逸定理の数学的構造を明らかにすると共に、Alder-Wainwright効果の数学的構造がKMO-Langevin方程式に於ける無限の遅れの係数の多項式的長時間挙動で特徴付けられる事を証明した。

更に、岡部は、鏡映正値性を持つ離散時間定常過程の時間発展を記述する方程式として、離散第一(第二)KMO-Langevin方程式を導き、揺動散逸定理を証明した。特に、Einstein

の関係式が、久保ノイズを揺動力とする第二KMO-Langevin方程式に於いて、連続系の時は成立するが、離散系の時は成立しない事が示された。離散系の揺動散逸定理は非平衡統計物理学に於いて得られておらず知られていなかったとはいえ、統計物理学者を動揺させた。

申請者は、鏡映正値性を持つ離散時間定常過程に対して二つの主要な事を証明した。岡部の導出した離散第二KMO-Langevin方程式を、連続系の第二KMO-Langevin方程式と類似の形に修正する事によって、Einsteinの関係式が成立する事を証明した。Einsteinの関係式を成立させる物理的揺動力と考えられている久保ノイズが離散系の場合も意味を持つ事を示したこの研究は、統計物理学者を安心させると共に、Stokes-Boussinesq-Langevin方程式の一般形である連続KMO-Langevin方程式が数学的にも物理学的にも自然な方程式である事を示すという意味で、岡部の一連のLangevin方程式の研究を十分に補足する。更に、離散時間Alder-Wainwright効果も又この修正第二KMO-Langevin方程式に於ける無限の遅れの係数の多項式的長時間挙動で特徴付けられる事を証明した。その際、相関関数と遅れの関数が、連続系の時と異なり、必ずしも単調減少でない為、緩増加関数に対する強力なタウバー型定理を用いると言う連続系の時とは異なる独創的な証明が必要である。

離散時間定常過程を研究する意義は、自然界に於ける現象が連続系であっても、実験・観測で得られるデータは離散的であるため、連続系現象の離散近似の研究が理論的にも応用的にも必要な事にある。

以上のように申請者の研究は、KMO-Langevin方程式論に新しい知見をもたらすものであると共に、物理現象の数学的証明のみが数学の果たす役割でなく、物理現象の数学的構造の解明が、物理的構造の解明に有用である事を示す一例を与えている。よって審査員一同は、申請者が理学博士の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。